1. Quando si definiscono competenze…

Gianfranco Arrigo

Nowadays, all over the world, in schools "competences" are a common topic of discussion. Anybody concerned with teaching is in the process of building up their personal mental images of the concept of "competence". However people hardly ever go beyond the theoretical aspects.

The real difficulties begin as soon as one wants to apply the concept to the didactic practice. To form specific disciplinary competences is an intricate task which everyone has to perform. In the paper the different phases of this complex operation are unfolded and an instance of these activities, recently carried out within the redefinition of the programmes for the low secondary school, is also illustrated.

1. Ragionare sulla competenza

Oggi, in tutto il mondo, nella scuola, si parla di competenze. Ogni insegnante, ogni didatta, chiunque insomma si occupi di insegnamento, sta costruendo le proprie immagini mentali del concetto di competenza. Quasi sempre, però, ci si limita a questioni teoriche, ci si esibisce in più o meno complicate enunciazioni che poi si rifanno al tale o al tal altro autore. C'è chi sbandiera il nuovo concetto didattico come se fosse una grande creazione, qualcosa che potrà finalmente risolvere i problemi dell'apprendimento e che causerà una rivoluzione senza precedenti nella prassi didattica. D'altra parte c'è chi si dispone a riccio, assimila queste nuove idee al fenomeno della globalizzazione e considera il tutto alla stregua di un nuovo tentativo del Grande Fratello di orwelliana memoria, questa volta indirizzato alla conquista della didattica.

Chi si occupa di didattica della matematica e ha vissuto intensamente le vicissitudini degli scorsi decenni difficilmente si lascia convincere dalle due tesi opposte sopracitate. Se da un lato la questione delle competenze non appare proprio come grande e sconvolgente novità, dall'altro non si vede nemmeno come possa presentarsi gravida di pericoli per quella libertà d'azione che la scuola in generale e gli insegnanti in particolare rivendicano a giusta ragione. Oggettivamente, la pedagogia della competenza, così come l'abbiamo presentata ed esemplificata sull'ultimo numero di questa pubblicazione, è innanzi tutto una (nuova) modellizzazione dell'apprendimento concettuale. Si va dicendo, giustamente, che la competenza viene raggiunta da un allievo quando, di fronte a una determinata situazione (didattica), conosce i contenuti essenziali, sa rendere operativa la propria conoscenza, sa assumere atteggiamenti improntati, fra l'altro, al giudizio e alla riflessione metacognitiva. Fin qui, tutto bene, tutti in chiaro, tutti soddisfatti: si riscrivono i programmi secondo il concetto di competenza e si ridisegnano (nuove) metodologie per la valutazione, si riscopre la valutazione criteriale.

Ma le difficoltà iniziano quando si vuole passare dalle *macrocompetenze* (che servono a poco) alle *microcompetenze* (che danno sostanza all'intera operazione). Ci si rende conto che se è (relativamente) facile esprimere macrocompetenze, come per esempio a matematica «Saper risolvere problemi» o a italiano «Tematizzare i propri sentimenti in modo adeguato ed efficace»; tutt'altra cosa è dover definire una competenza (microcompetenza) evitando il più possibile ambiguità e genericità. È qui che la definizione teorica di competenza mostra tutti i suoi pregi e difetti, a volte in modo irriverente sia nei confronti dei teorici che l'hanno creata – ma che (quasi) sicuramente non hanno provato a calarsi in una disciplina –, sia nei confronti dell'insegnante che scopre di non essere del tutto in chiaro sul proprio operato, o, per lo meno, di aver agito in passato più di istinto che di riflessione.

2. Definire una competenza matematica

Se terminassimo qui il discorso, commetteremmo lo stesso errore appena rinfacciato ai teorici della pedagogia. Parleremmo, cioè, teoricamente, astrattamente, senza l'imprescindibile supporto sperimentale che deve accompagnare ogni teoria didattica. L'esempio che seguirà non dev'essere però visto solo come contributo dovuto all'aspetto sperimentale appena sottolineato. Al contrario, il didatta disciplinare parte sempre dal concreto, perché sa che la materia prima della sua elaborazione la trova nelle classi, nella mente degli insegnanti così come in quella degli allievi in fase di apprendimento. È dunque inimmaginabile pensare a una competenza senza entrare nel vivo del problema didattico. Prima di tutto, occorre inserirsi coerentemente nel quadro degli obiettivi (ai tre livelli) che interessano la competenza che si vuole costruire.

Al primo livello troviamo le finalità della scuola, in particolare del settore scolastico in cui ci si situa. Per esempio, nella scuola media ticinese queste indicazioni (scelte pedagogiche e didattiche di fondo) le troviamo nella *Mappa formativa*. Quelle riguardanti le scuole medie superiori sono invece contenute nel documento *Piano quadro degli studi* (emanato dalla Conferenza svizzera dei direttori cantonali della pubblica educazione). In passato questi documenti non esistevano, ma in una società (e di conseguenza in una scuola) statica, come quella di qualche decennio fa, non erano strettamente necessari: l'insegnante esordiente trovava le stesse finalità che erano alla base dell'insegnamento da lui ricevuto come allievo: possiamo dire che le finalità erano tramandate per via naturale. In una società complessa e in continuo movimento come quella attuale, questo fenomeno non si può più verificare, evidentemente; ecco quindi nascere la necessità di avere documenti-guida come quelli appena citati.

Al secondo livello, coerentemente con le finalità scelte, occorre riflettere sulla natura cognitiva degli apprendimenti: qui si entra già nel campo disciplinare. Si tratta di definire la tipologia e la qualità cognitiva degli apprendimenti che si vogliono inserire nella competenza. Uno strumento utile per svolgere questo lavoro è la Tavola tassonomica degli apprendimenti matematici. Essa ci aiuta a calibrare quel generico miscuglio di saperi, saper fare e saper essere che troviamo, per esempio, nella definizione di competenza dovuta a Roegiers.

Infine al terzo livello troviamo i «mattoncini» della competenza, cioè gli obiettivi sepcifici disciplinari che la compongono. E già che siamo nella metafora, ci piace precisare che la costruzione della competenza è simile a quella di un muro: dopo aver consultato i piani della costruzione stabiliti dall'architetto (obiettivi del primo livello), il capomastro decide le modalità di esecuzione (obiettivi del secondo livello) e il muratore predispone i mattoni (obiettivi del terzo livello) combinandoli opportunamente, saldandoli insieme e infine intonaca la parete. Quando il muro è finito, i singoli mattoni non si vedono più. Così come il muro non è l'insieme dei suoi mattoni, ma molto di più, la competenza non è l'insieme dei suoi obiettivi, ma molto di più.

3. Esempio: competenza sul calcolo letterale per la quarta media

Passiamo finalmente all'azione. Vogliamo costruire una competenza per la classe quarta (diciamo corso attitudinale) sul calcolo letterale.

Iniziamo col chiederci quali finalità potrebbero essere interessate dall'apprendimento del calcolo letterale. Sulla mappa formativa troviamo, per esempio:

1.1 Numeri (… calcolo numerico e letterale;…)

L'indicazione è chiara: il calcolo letterale va visto come generalizzazione di quello numerico. La lettera rappresenta un numero. Può essere un numero qualunque di un prefissato insieme (di definizione), cioè una *variabile*; oppure un qualunque numero costante, un *parametro*; oppure ancora un numero sconosciuto, da trovare, un'*incognita*.

2.1 Sviluppare processi progressivi di astrazione (…)

Messaggio importante: il passaggio dal numero alla lettera dev'essere fatto lentamente, continuamente, progressivamente, seguendo un naturale processo di generalizzazione.

3.1 (…) la presa di coscienza del suo (della matematica) valore applicativo a problemi di natura pratica, professionale, personale (…).

Le situazioni di apprendimento dovranno tenere conto delle applicazioni a situazioni extra-matematiche. Il calcolo letterale può servire per generalizzare situazioni pratiche particolari, rispondenti a questioni non necessariamente matematiche: in questo caso l'allievo è chiamato a costruire il modello matematico (segnatamente algebrico-letterale) della situazione.

1.2 Aspetti di storia della matematica nella costruzione e nello sviluppo della conoscenza matematica (segnatamente nella conquista del calcolo letterale come generalizzazione di quello numerico).

Nella definizione della relativa competenza bisognerà far entrare anche la presa di coscienza del lungo e travagliato cammino storico (filogenetico) che ha portato i matematici alla definizione e all'uso corrente dell'odierna simbologia algebrica. L'allievo potrà così apprezzare i grandi vantaggi che questa fondamentale conquista culturale ha apportato.

2.2 Agire in diversi contesti e piani applicativi (…).

L'abitudine ad usare lettere e a sviluppare calcoli letterali dev'essere spinta fintanto che l'allievo sia capace autonomamente di farne uso opportuno nei vari campi applicativi, anche in contesti non noti.

3.2 Alimentare il grado di fiducia nelle proprie capacità di operare (…).

Quando l'allievo riesce a raggiungere pienamente la competenza, incrementerà la fiducia nei propri mezzi e acquisirà più coraggio nell'operare con le lettere.

1.3 (…) l'universalità della matematica (del calcolo letterale) (…).

Quello letterale-algebrico è un linguaggio universale. In tutte le culture, comprese quelle che usano alfabeti diversi dal nostro (cirillico, ideografico, ecc.) il calcolo algebrico si scrive allo stesso modo. In virtù di ciò, qualsiasi allievo ticinese può comunicare, in linguaggio algebrico, la risoluzione di un problema, per esempio, a un compagno svizzero tedesco, a uno russo o a uno cinese. Un allievo competente nel calcolo letterale e cosciente di questa realtà prova piacere e rinnovata motivazione a perfezionare le proprie capacità.

2.3 (…) comunicare in linguaggio matematico, anche facendo capo a mezzi tecnologici.

La comunicazione in linguaggio algebrico sta alla base dell'interazione uomo-macchina per questioni matematiche. Senza dovere necessariamente fare allusione ai linguaggi classici (BASIC, PASCAL, ecc.), l'uso corretto del calcolo letterale è necessario per l'allestimento di un foglio elettronico, per poter lavorare con un programma di elaborazione simbolica o con programmi specifici, come per esempio quelli predisposti per l'elaborazione statistica.

Vediamo ora quali particolari categorie di apprendimenti possono essere interessate dall'acquisizione della competenza sul calcolo letterale. Ci aiutiamo con la Tavola tassonomica per la matematica di Arrigo-Frabboni.

111 Riconoscere e usare un simbolo

121 Eseguire operazioni elementari

122 Eseguire procedimenti automatizzati

La tecnica del calcolo letterale poggia sul riconoscimento dei simboli algebrici (lettere, segni di operazione, parentesi, segni di uguaglianza e di disuguaglianza, esponenti, segni di frazione, ecc.). Il raggiungimento della competenza comprende anche l'automatizzazione di alcune operazioni elementari e procedimenti, come per esempio: $a+a = 2a$; $a \cdot a = a^2$; $a \cdot (b+c) = ab + ac$

212 Riconoscere un procedimento / concetto / principio

Essere competenti significa anche essere in grado di far agire la propria conoscenza e per fare ciò è necessario riconoscere dove poter operare in un certo modo.

214 Adattare procedimenti noti a diverse situazioni note

Nell'applicare proprie conoscenze di calcolo letterale, molto spesso, capita di doverle adattare alla situazione contingente; anche questa abilità fa parte del bagaglio della competenza che stiamo costruendo.

221 Eseguire procedimenti non automatizzati

Fra i procedimenti del calcolo letterale che concorrono alla conquista della competenza figurano anche quelli che ragionevolmente un allievo di scuola media non può automatizzare (né sarebbe opportuno che lo facesse…). Al contrario di ciò che avviene per gli automatismi, questi algoritmi vengono eseguiti con l'aiuto del ragionamento cosciente; quindi impegnano costantemente l'intelletto. Come esempi citiamo: la semplificazione di un'espressione letterale, lo sviluppo del quadrato di un binomio, la fattorizzazione di un polinomio, la risoluzione di equazioni o disequazioni, la costruzione di formule.

222 Applicare procedimenti / concetti / principi

223 Controllare e giustificare procedimenti

La competenza comprende anche l'applicazione di una conoscenza di calcolo letterale a un nuovo contesto (anche extra-matematico); in questi casi è importante la verifica e può essere decisiva la ricerca di una giustificazione, senza la quale l'applicazione potrebbe apparire arbitraria o addirittura scorretta.

3111 Analizzare

3112 Confrontare, scegliere, decidere

La situazione viene presentata all'allievo, di solito, mediante un testo scritto, oppure con una figura geometrica o una rappresentazione grafica funzionale (non sono escluse combinazioni dei diversi registri semiotici). Al primo livello, più alto, la situazione non propone domande specifiche: le stesse sono lasciate all'intuizione degli allievi. Al secondo livello, intermedio, potrebbero esserci una o più domande di carattere generale. Infine, al terzo livello, più basso, la situazione è accompagnata da una serie di domande precise che segnano le grandi linee dell'iter risolutivo. Le diverse possibilità di proporre una situazione implicano altrettanti gradi di sollecitazione delle capacità analitiche e decisionali. Mentre il primo livello esige un'analisi completa e una importante presa di decisioni, il terzo livello riduce notevolmente soprattutto la necessità di confrontare e decidere. Le capacità di analizzare e di prendere una decisione, non possono essere direttamente insegnate: occorre svilupparle, gradatamente, con l'esercizio.

3113 Impostare un ragionamento deduttivo

L'analisi di un contesto problematico è essenzialmente un processo deduttivo: dal generale al particolare, dal macro al micro, da situazioni complesse (anche non matematiche) a semplici relazioni matematiche.

3121 (…) Matematizzare situazioni

L'analisi della situazione, le relative decisioni e le deduzioni sono effettuate con lo scopo di tradurre la situazione in linguaggio matematico. In altre parole, la situazione viene modellizzata in termini matematici; si costruisce il modello matematico. Ovviamente il modello costruito da allievi di scuola media è commisurato alle loro conoscenze. Può essere uno schema risolutivo algoritmico, espresso a parole o mediante schematizzazione grafica; oppure un'equazione o una funzione; oppure ancora una figura geometrica, una tabella, un grafico funzionale; o altro.

3122 Impostare un ragionamento induttivo

Nel combinare i vari elementi analizzati per ottenere un modello matematico della situazione, si opera per induzione. Si passa, cioè, da una situazione dettagliata a un modello sintetico che generalizza i casi particolari analizzati. Ciò avviene mediante un processo di sintesi: dal particolare al generale, dal dettaglio alla macrostruttura.

3131 Cogliere le strutture interne di una situazione matematica

Gli allievi della scuola media riflettono sulla loro attività matematica più di quanto comunemente si pensa. Ovviamente non lo fanno spinti da curiosità epistemologiche, ma da bisogni concreti. L'esperienza di vita ha loro insegnato che, quando si riesce bene in una qualsiasi realizzazione, è buona cosa ricordarsi come si è fatto e soprattutto la natura delle scelte operate: così, quando capita di dover ripetere la stessa operazione, si economizzano le energie e si evita di ripetere gli errori già commessi. Succede così, per esempio, nella pratica dello sport e nelle attività ludiche: perché non dovrebbe succedere anche a scuola? Compito degli insegnanti, semmai, è di aiutare gli allievi ad approfondire, ad affinare la loro introspezione: ne guadagnerà sicuramente la qualità degli apprendimenti. Anzi, come già detto, senza un minimo di riflessione metacognitiva non si raggiunge alcuna competenza.

3213 Riconoscere il problema-chiave

3214 Intuire un nuovo procedimento / concetto / principio

Ogni vero problema (dunque un problema del quale l'allievo non conosce ancora alcun iter risolutivo) presenta uno o più punti-chiave. Scoprirli, significa fare un passo decisivo verso la soluzione. Molto spesso, tutto ciò conduce a intuire nuove conoscenze matematiche. Siamo di fronte a obiettivi di saper fare strategico, che dunque non possono essere direttamente insegnati, ma che, come abbiamo già detto per l'analisi, occorre coltivare, sviluppare, rinfrancare (anche in senso affettivo) con la pratica di diverse situazioni che li stimolino.

3221 Inventare per analogia procedimenti / concetti / principi

3222 Estrapolare procedimenti / concetti / principi

Ribadiamo la nostra convinzione che l'attività matematica, quando si esplica all'interno di una situazione ben scelta, è altamente creativa. Oltre che per l'intuizione – che si traduce per esempio nel riuscire a capire dove si trovi la chiave di un problema oppure quale concetto matematico sia nascosto in un dato contesto – vi è spazio per l'invenzione, che, almeno in matematica, non può prescindere da determinate condizioni di fondo, ma proprio per questo – diciamo e sottolineiamo – acquista maggior valore cognitivo. Sempre, nell'attività di apprendimento in situazione, i momenti di creazione possono essere distinti in due categorie: l'inventare per analogia (per esempio: siamo in chiaro sull'addizione in **N**, vediamo se e come possiamo costruirne una analoga in **Z**) e l'estrapolare (per esempio, estendere le proprietà delle potenze a esponente naturale a quelle a esponente intero o razionale).

3223 Formulare problemi nuovi / soluzioni nuove

Qui siamo al punto di arrivo di tutto ciò che abbiamo appena descritto: un apprendimento in situazione – che sia ben riuscito – porta gli allievi a porsi nuove domande, a formulare nuovi problemi che porteranno, a loro volta, a nuove conquiste cognitive.

Possiamo finalmente enunciare una competenza relativa al calcolo letterale per la classe quarta, corso attitudinale. Eccola direttamente presa dai documenti del Piano formativo:

«In una situazione (anche extra-matematica), saper utilizzare lettere sia come variabili, sia come parametri, sia come incognite per costruire modelli matematici mediante l'impiego dei concetti di funzione, equazione, disequazione e sistema; saper semplificare espressioni letterali, saper calcolare con radici quadrate e saper risolvere equazioni, disequazioni e sistemi relativi alla situazione data.»

4. Costruire una situazione della famiglia relativa alla competenza enunciata

Perché l'opera sia completa, occorre però proporre situazioni che si pensa siano adatte a sviluppare la competenza mirata.

Questo lavoro è sicuramente il più delicato da svolgere, anche perché le situazioni devono cambiare continuamente, di anno in anno, di volta in volta. Una situazione ripetuta perde infatti gran parte della sua efficacia, così come un problema conosciuto (nel senso che lo si è già risolto almeno una volta) perde buona parte del suo lato… problematico. Quindi c'è un grande bisogno di situazioni. Sono gli insegnanti i primi ad essere chiamati a creare situazioni. Certo, non si devono mettere davanti a un foglio bianco. Occorre produrre qualche esempio. Nel documento «Competenze per classe (…)» del Piano formativo della scuola media ne troviamo alcuni. Di seguito è descritta un'esperienza vissuta lo scorso anno, nel tentativo di creare una nuova situazione relativa alla competenza sopracitata.

L'esempio, pensato a tavolino, è il seguente (ne diamo alcune versioni, a diversi livelli di complessità):

Primo livello

«Il rapporto tra l'apotema e il lato di un qualsiasi esagono regolare è sempre lo stesso?»

Secondo livello

«Calcola il rapporto tra l'apotema e il lato di un esagono regolare ed esprimi il risultato nella forma più semplice.»

Terzo livello

*«Sia **r** il lato di un esagono regolare e **a** il suo apotema.*

*i) Esprimi l'apotema **a** in funzione del lato **r***

*ii) Calcola, sempre in funzione di **r**, il rapporto tra l'apotema **a** e il lato **r**.*

iii) Che cosa ne deduci?

Non a caso abbiamo detto «pensato a tavolino», perché quando è stato sottoposto ad alcuni insegnanti ne è sorta una discussione. Taluni ritenevano l'esempio fuori dalla portata degli allievi di quarta media, altri scommettevano che, sì, si sarebbe potuto proporre, ma solo nella versione iii). La discussione è stata importante e ha indotto alcuni docenti a provare con le loro classi. Prima di mostrare qualche risultato, mandiamo un sentito ringraziamento a tutti coloro che in un modo o nell'altro ci hanno trasmesso un feedback in merito, ma in particolare alle insegnanti Manuela Gerber e Margherita Tavarini della Scuola media di Breganzona e Claudia Mattei della Scuola media di Castione, per l'ottimo lavoro di rilevazione.

4.1. Esperienza di Manuela Gerber

Formulazione della situazione: al secondo livello.

Breve cronaca

Un allievo chiede conferma se «calcola il rapporto tra apotema e lato di un esagono regolare» significa trovare ad esempio una forma simile a

$$a = \frac{3}{4}\ell$$

Docente: Conferma e aggiunge che più precisamente come risultato del rapporto si pensa a

$$\frac{a}{\ell} = \frac{3}{4}$$

Commento

Qui si vede la difficoltà principale incontrata da questi allievi: interpretare correttamente il testo della consegna. Eppure si tratta di un testo lineare, breve, chiarissimo.

Un gruppo presenta la scrittura seguente e chiede se è corretta:

$$a = \sqrt{r^2 \pm \left(\frac{1}{2}r\right)^2}$$

Docente: chiede a cosa corrisponde la formula scritta e perché sia stata applicata; dopo aver ascoltato la motivazione degli allievi, li rassicura e li invita a continuare.

Un gruppo presenta la scrittura seguente e chiede se il risultato ottenuto è corretto (non è inteso come soluzione del problema):

$$a = \sqrt{r^2 \pm \frac{1}{2}r^2} = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Docente: segnala (senza indicarlo) l'esistenza di un errore e invita il gruppo a riflettere sulla scrittura. Dopo qualche minuto il gruppo indica che l'errore consiste nella dimenticanza delle parentesi.

Dopo 12 minuti di lavoro, **un gruppo** consegna la soluzione, affermando «ecco la soluzione»: risulta corretta.

Dopo 17 minuti **un altro gruppo** mostra la soluzione richiedendo un parere perché ha qualche dubbio sulla correttezza del seguente calcolo:

$$a = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{1}{2}\ell\right)^2} = \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}\ell^2} = \frac{\sqrt{3\ell^2}}{4} = \frac{3}{4}\ell$$

Un allievo del gruppo spiega di aver usato il Teorema di Pitagora e giunto a

$\frac{\sqrt{3\ell^2}}{4}$ si accorge che la scrittura corretta è $\sqrt{\frac{3\ell^2}{4}}$

e quindi propone $\sqrt{\frac{3}{4}}\,\ell$

Quando la docente segnala la consegna «esprimi nella forma più semplice», **l'allievo** propone

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell$$

e rivede di conseguenza il resto della risoluzione.

Commento

Queste sono vere diffcoltà di calcolo letterale, ma, come si può notare, sono superate abbastanza facilmente, con l'aiuto (peraltro discreto) dell'insegnante.

Un **altro gruppo** afferma di non capire bene. Questi allievi hanno considerato una piramide retta avente per base un esagono regolare e di conseguenza cercano il rapporto tra l'apotema della piramide e il lato dell'esagono regolare. La **docente** rilegge il problema con gli allievi e li aiuta ad analizzare la richiesta.

Commento

Di nuovo riscontriamo una grossa difficoltà nell'interpretare correttamente il testo. L'analisi dell'enunciato è carente: il termine «apotema» richiama immediatamente «piramide»; il resto scompare.

Altri che hanno impostato

$$\sqrt{x^2 \pm \left(\frac{1}{2}x\right)^2}$$

affermano di non saper continuare. In seguito a una stimolazione della docente, scrivono

$\frac{\sqrt{3x^2}}{2}$ e infine $\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Gli **allievi** che sono in chiaro sul significato di rapporto scrivono

$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{x}$ ma elaborano $\frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot x$.

La **docente** ricorda che la frazione di frazione è una divisione e che la scrittura equivale a

$\frac{\sqrt{3}}{2}x : \frac{x}{1}$ a questo punto gli **allievi** elaborano $\frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{3}x}{2x}$.

La **docente** chiede se il risultato è semplificato al massimo. Dopo qualche titubanza arriva la soluzione

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Commento

Questa è una tipica difficoltà legata al calcolo algebrico con frazioni letterali: una frazione fratto un numero (non frazionario) risulta ben più arduo da semplificare rispetto al quoziente tra due frazioni.

Un gruppo presenta il risultato

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\ell$$

e chiede se è già la soluzione («Va bene così o devo continuare?»)

La **docente** si fa spiegare dagli allievi ciò che hanno fatto e questi si accorgono di aver solo espresso l'apotema in funzione del lato dell'esagono.

La **docente** fa rileggere la consegna e chiede che cosa significa «il rapporto tra…». Gli allievi non sanno rispondere. La **docente** spiega con un esempio (rapporto tra lunghezza e larghezza dell'aula), in seguito ritorna sul problema e chiede agli allievi di spiegare che cosa devono trovare. A questo punto capiscono la richiesta e intravedono la strada da seguire.

Commento

Qui la difficoltà principale risiede nella scarsa conoscenza del concetto di rapporto, nozione questa da non trascurare perché molto importante nelle applicazioni del calcolo.

Dopo 35 minuti l'ultimo **gruppo** presenta la soluzione corretta.

4.2. Esperienza di Margherita Tavarini

Formulazione della situazione: al secondo livello, scritta alla lavagna**, accompagnata da domande poste oralmente dalla docente (D), del tipo: «Come facciamo senza i dati?», «Se non ci sono dati, voi che cosa suggerite di fare?»**

Risposta unanime degli allievi (A):

A: Usiamo le lettere.

Gli allievi incominciano a lavorare individualmente o a piccoli gruppi.

A: Che cos'è il rapporto? Non è mica una divisione? Uno fratto l'altro?

D: Sì. Dimmi con altre parole che cos'è un rapporto fra grandezze.

A: Fare la differenza?!? Ma nooo, che…, è vedere quante volte è più piccola o più grande, cioè moltiplicare una grandezza per il numero trovato con la divisione e trovare l'altra grandezza.

D: Può andare.

(…)

A: Si può risolvere con un sistema di equazioni?
D: Spiegami.
A: Ci sono tre incognite.
D: Quali?
A: ℓ il lato, x l'apotema e r il raggio e quindi…
D: Attenzione; che cos'è l'incognita?
A: Ah, la x è l'incognita, cioè l'apotema.
D: Perché è l'incognita?
A: È quella che devo trovare.
D: Quali sono i dati?
A: ℓ
D: Allora ℓ è un'incognita?
A: No.
D: Quante sono quindi le incognite?
A: Una.
D: Dunque hai un'incognita x e un dato ℓ?
A: Adesso trovo x con il teorema di Pitagora.
D: Vai!
(…)

Commento

All'inizio gli allievi non hanno dubbi sul fatto che si debbano usare le lettere: significa che sono in grado di intraprendere questo processo di generalizzazione.

Vengono però a galla le difficoltà tipiche di questa attività: il concetto di rapporto (non così scontato come si penserebbe…) e il ruolo delle lettere interessate dal problema (non sempre gli allievi di quarta media riescono a distinguere subito il parametro dalla variabile o dall'incognita).

A: Questo problema è presentato malissimo.
D: Perché?
A: Perché chiede una cosa, invece è un'altra.
D: Spiegati meglio.
A: Non viene specificato che cosa bisogna trovare.
D: Leggiamo assieme il problema.
A&D: Calcola il rapporto tra l'apotema e il lato...
A: Allora trovo a fratto ℓ?
D: Trova a fratto ℓ.
(…)

Commento

Qui vediamo chiaramente la difficoltà che genera un simile enunciato (non è il solito problema con dati e con una richiesta chiara). È la difficoltà ipotizzata nella discussione preventiva fra gli insegnanti.

A: Scusi è giusto? (ha trovato l'apotema con Pitagora; i calcoli sono giusti)
D: Che cos'hai trovato?
A: L'apotema e adesso trovo il rapporto.

A: (Dopo un po' ha trovato l'apotema correttamente)
È giusto?
D: Sì.
A: E il rapporto?
D: Avanti. Prova.
A: Si fa questo (l'apotema) diviso ℓ oppure ℓ diviso l'apotema?
D: Leggi attentamente il problema.
(…)

Commento

Incontriamo un altro segnale del fatto che il testo non è stato analizzato bene.

A: È giusto? $a = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$

A: (Cogliendo l'espressione di dissenso della docente)
Ho dimenticato la radice.

$$a = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \ell - \frac{\ell}{2}$$

D: E gli esponenti di ℓ dove sono finiti?
A: Ah, è vero, li ho semplificati con la radice. Non si può. Adesso lo rifaccio.
(…)

Commento

Fa capolino l'errore tipico $\sqrt{a^2 \pm b^2} = a \pm b$, *che, con molta pazienza, va eliminato entro la fine della quarta media.*

A: Finito! $\frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\ell} = \sqrt{3}$

D: Mi spieghi che cosa hai fatto?
A: Ho moltiplicato l'apotema per l'inverso del lato.
D: $\frac{2}{\ell}$ è l'inverso di ℓ?
A: No è l'inverso di 2 ℓ
D: Sei sicuro?
A: Se è ℓ l'inverso è…
D: Supponiamo che ℓ sia 5 l'inverso di 5 è?
A: 1/5
D: Allora...
A: Ahh!
(…)

Commento

Le lettere fanno anche questi scherzi: l'allievo che è capace di trovare l'inverso di 5, non è detto che lo sappia fare correttamente con ℓ. L'apparizione dell'elemento parassita «2» può essere collegata a una (cattiva) abitudine che l'allievo assume quando a scuola è troppo abituato a trovare risultati che si semplificano al massimo.

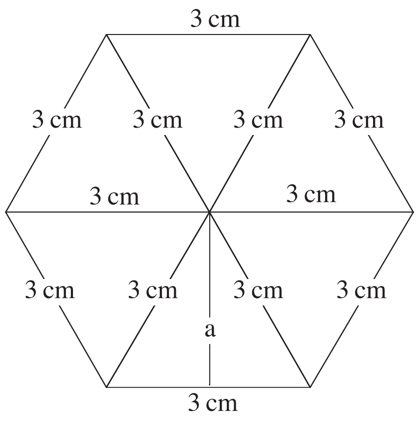
D: Avete finito?
A: Dobbiamo fare la verifica.
D: Come?
A: Sostituendo ℓ con un numero subito all'inizio, fare tutto il problema senza usare le lettere, verificare se poi esce lo stesso rapporto.
D: Mi sembra una buona idea.
A: (Dopo un po')
Abbiamo trovato lo stesso risultato. Quindi è giusto.
D: Molto probabilmente è giusto.

È finita l'ora. La maggior parte degli allievi ha portato a termine il problema. Non tutti hanno verificato la correttezza della soluzione raggiunta.

4.3. Esperienza di Claudia Mattei

Claudia ha proposto questa situazione come prova di valutazione nella sua classe di quarta media, adottando l'enunciato al secondo livello. Ci ha fornito fotocopie di alcuni elaborati, che ci permettono di dedurre alcune interessanti osservazioni.

Allievo 1



$\ell = 3$ cm

$$\text{apotema} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{6{,}75} \cong 2{,}6 \text{ cm}$$

$$k_1 = \frac{3}{\sqrt{6,75}} = \frac{\ell}{a} \cong 1,15 \text{ cm}$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{6,75}}{3} = \frac{a}{\ell} \cong 0,87 \text{ cm}$$

Commento

Questo allievo mostra di avere una buona capacità di risolvere il problema con dati numerici. Non è però ancora in grado di passare alla generalizzazione. Lo si vede chiaramente osservando due indicatori: all'inizio sostituisce subito il dato parametrico con uno numerico, nel disegno sente la necessità di segnare la misura 3 cm dappertutto. Siamo però fiduciosi perché la correttezza formale mostrata nel calcolo gli dovrebbe permettere di passare all'uso delle lettere senza troppe difficoltà. Basta una piccola spinta… Inoltre, la sua scrupolosità lo spinge a calcolare il rapporto e il suo inverso: per lui, nell'enunciato, si sarebbe dovuto precisare «presi nell'ordine».

Allievo 2

Calcola correttamente il rapporto, ottenendo $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ma poi si sente in dovere di aggiungere:

«cioè prendi il lato del triangolo, lo dividi per 2 e lo moltiplichi per $\sqrt{3}$».

Commento

Pur avendo ottenuto il rapporto correttamente, questo allievo ci mostra la difficoltà di considerare un rapporto come tale. L'immagine mentale è ancora quella della frazione come operatore: ecco spiegato perché l'allievo vuole applicare il rapporto al lato. Il concetto di rapporto segue nel tempo quello di operatore frazionario, ma la sua conquista non è per nulla facile.

Allievo 3

Dapprima scrive:

$$\frac{a}{\ell} \qquad a = \frac{\ell}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{rapp} \Rightarrow \frac{\frac{\ell}{2}\sqrt{3}}{\ell} = \frac{\ell}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Poi aggiunge:

$$a = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{1}{2}\ell\right)^2} = \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}\ell^2} = \sqrt{\frac{3}{4}\ell^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$$

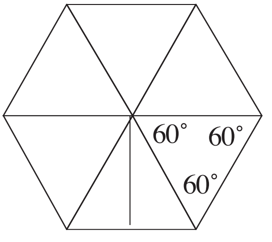
Commento

Questo è l'allievo che tutti sperano di avere. Lui sapeva già che

$$a = \frac{\ell}{2}\sqrt{3},$$

per esperienza precedente. Molto opportunamente usa questo risultato acquisito. Ma, a questo punto, gli sorge il dubbio che l'insegnante non sia d'accordo («Voglio tutti i calcoli…», avrà ripetuto più volte). Quindi per accontentare l'insegnante (la scuola, l'istituzione) si sente in dovere di scrivere il post scriptum.

Allievo 4



$$\frac{360}{6} = 60$$

è formato di 6 triangoli equilateri

$$\ell = \frac{2}{3}a$$

Commento

Siamo di fronte a un tipico esempio di «matematichese». Le prime due righe contengono affermazioni corrette, ma che non sono servite per ottenere il risultato. Da dove venga questo risultato è poco chiaro; potrebbe essere l'effetto di un madornale errore di calcolo, oppure di una stima a occhio, oppure…

4.4. Conclusione

Costruire competenze è un lavoro tutt'altro che facile. Entrano in gioco parecchi fattori: alcuni di tipo «globale», che sono presenti in tutte le competenze (per esempio, la scelta degli obiettivi ai tre livelli, l'individuazione di una famiglia di situazioni,…), altri di tipo «locale» (per esempio, come abbiamo appena visto, l'individuazione preventiva delle diverse misconcezioni che si frappongono come ostacolo al raggiungimento della competenza). Ribadiamo: costruire una competenza non vuole dire solo occuparsi di ciò che l'allievo dovrà essere in grado di produrre alla fine, ma anche ricercare gli ostacoli (didattici ed epistemologici) che possono impedire il suo raggiungimento. Per scoprire questi ultimi, è necessario effettuare un paziente lavoro di osservazione nelle classi. Occorre investire tempo ed energie, ma, alla fine, la ricaduta sull'insegnamento è importante. Abbiamo volutamente tralasciato, in questa sede, di affrontare il problema della valutazione delle competenze. Ci riserviamo di riprenderlo sul prossimo numero.